

Некоммутативные симметрии

На предыдущих лекциях мы рассматривали семейства частных решений, определяемых стационарными уравнениями для высших симметрий заданного интегрируемого уравнения. Могло сложиться впечатление, что интегрируемость исходного уравнения автоматически означает и интегрируемость его конечномерных редукций. Однако, все не так просто. Стационарные уравнения, которые мы рассматривали, оставались интегрируемыми по той причине, что они строились из симметрий, коммутирующих друг с другом. При переходе к конечномерной динамической системе это свойство сохраняется, что и обеспечивает ее интегрируемость по Лиувиллю. Все портится, стоит добавить в стационарное уравнение хотя бы одну симметрию, не коммутирующую с остальными. В результате возникают динамические системы более сложной природы, хотя какие-то следы интегрируемости сохраняются.

Редукции КдФ к ОДУ второго порядка

Напомним, что в начале курса мы искали частное решение уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \quad (1)$$

в виде бегущей волны $u(x, t) = y(z)$, $X = x - ct$. При этом размерность задачи понижается: вместо УЧП возникает ОДУ $y''' + 6yy' + cy' = 0$. Оно допускает понижение порядка до первого

$$(y')^2 + 2y^3 + cy^2 + c_1y + c_2 = 0 \quad (2)$$

и решается в эллиптических функциях, а в частном случае даёт солитонное решение. Оказывается, что это не единственная возможная редукция к ОДУ, вот ещё две.

- Будем искать решение (1) в виде $u(x, t) = y(X) - ct$, $X = x - 3ct^2$. Имеем

$$u_t = -6cty' - c, \quad u_x = y', \quad u_{xxx} = y''''.$$

Здесь t — «лишняя» переменная, но при подстановке в уравнение она удачно сокращается:

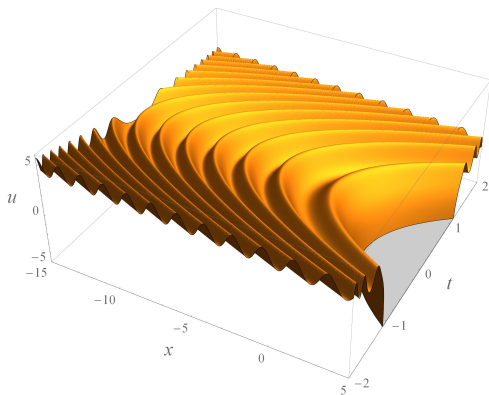
$$-6cty' - c = y'''' + 6(y - ct)y' \Rightarrow y'''' + 6yy' + c = 0 \Rightarrow y'' + 3y^2 + cX + c_1 = 0.$$

Здесь порядок удаётся понизить лишь один раз. После очевидных линейных замен переменных уравнение приводится к каноническому виду

$$w'' = 6w^2 + z. \quad (3)$$

Это первое уравнение Пенлеве (всего их шесть, мы будем обозначать их P_1 – P_6).

Можно численно решить уравнение для $y(X)$ и построить соответствующий график для $u(x, t)$. Оказывается, что при этом в решении обязательно будет по крайней мере одна полюсная особенность на оси X , так что u будет иметь полюс,двигающийся по параболе $x - 3ct^2 = X_0$. Тем не менее, решение выглядит достаточно интересно.



- Будем искать решение (1) в виде $u(x, t) = t^{-2/3}y(X)$, $X = t^{-1/3}x$. Тогда

$$u_t = -\frac{2}{3}t^{-5/3}y - \frac{1}{3}t^{-2}xy', \quad u_x = t^{-1}y', \quad u_{xxx} = t^{-5/3}y'''.$$

Опять, при подстановке в уравнение «лишняя» t сокращается и получается уравнение

$$y''' + 6yy' + \frac{1}{3}(Xy' + 2y) = 0.$$

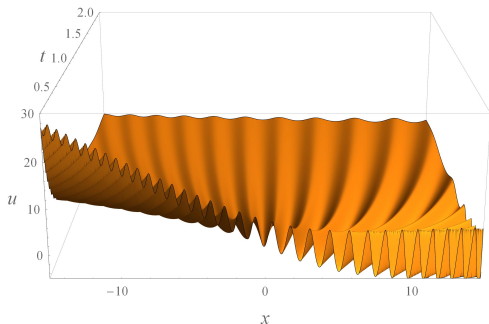
Порядок тоже понижается до 2, но менее очевидным способом, при помощи преобразования Миуры $-u = v_x + v^2$. Оно связывает (1) с уравнением мКдФ $v_t = v_{xxx} - 6v^2v_x$. При редукции имеем $v(x, t) = t^{-1/3}q(X)$, при этом $-y = q' + q^2$, а q удовлетворяет уравнению

$$q''' - 6q^2q' + \frac{1}{3}(Xq' + q) = 0 \quad \Rightarrow \quad q'' = 2q^3 - \frac{1}{3}Xq + c.$$

С точностью до растяжения, это уравнение P_2

$$w'' = 2w^3 + zw + a. \quad (4)$$

Численные эксперименты показывают, что среди решений уравнения для $y(X)$ есть как полюсные, так и регулярные при вещественных X . Однако, в данном случае особенность зашита в самой подстановке $y \rightarrow u$, так что решение всегда имеет особенность на прямой $t = 0$. На следующем графике изображено типичное решение при $t > 0.1$.



Уравнения Пенлеве были открыты в начале XX века в рамках аналитической теории ОДУ, при изучении уравнений, обладающих следующим свойством: общее решение, как функция комплексной переменной $w(z)$, не должно иметь подвижных (то есть, зависящих от выбора начальных данных) существенно особых точек. Подвижные полюсы допускаются. Например, у решений уравнения P_1 есть единственная фиксированная существенно особая точка $z = \infty$, а все остальные являются полюсами вида

$$w(z) = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \dots$$

Формально, в этом можно убедиться, подставляя ряд Лорана с таким начальным членом в уравнение (3). Попробуйте сделать это и покажите, что коэффициенты ряда содержат, кроме z_0 , еще одну произвольную константу, как и должно быть для уравнения второго порядка (то есть, можно поверить, что такой ряд может представлять общее решение). Это лишь первый шаг в доказательстве свойства Пенлеве — нужно еще доказать, что ряд сходится в некоторой области и, что при его продолжении за ее пределы не возникает существенно особых точек, кроме $z = \infty$. Это чистая правда, но выходящая за рамки нашего курса. Отметим, что для уравнения (2) разложение в полюсе начинается так же, как для P_1 , но глобальная картина иная: для эллиптических функций полюсы образуют регулярную двумерную решетку, а в случае P_1 решетка деформирована и ее описание представляет нетривиальную задачу.

В результате классификации уравнений второго порядка, обладающих свойством Пенлеве, был получен список из 50 уравнений. Из них большинство решаются в элементарных или эллиптических функциях, как в уравнении (2), или сводятся к линейным уравнениям гипергеометрического типа (например, Бесселя, Эрмита, Лежандра и т.д.). Лишь шесть уравнений не сводятся к чему-то более простому и определяют новые спецфунк-

ции — трансценденты Пенлеве (с оговоркой, что для некоторых специальных значений параметров и начальных условий решения все же могут упрощаться).

Для теории интегрируемых систем замечательным обстоятельством является то, что ОДУ со свойством Пенлеве постоянно возникают в качестве редукций, подобных рассмотренным выше, то есть, это не случайное совпадение. Можно даже использовать это свойство в качестве детектора интегрируемости (так называемый тест Пенлеве), но мы не будем на этом останавливаться. Упомянем только, что впервые свойство Пенлеве использовалось Ковалевской при анализе уравнений Эйлера–Пуассона, описывающих вращение твёрдого тела с закреплённой точкой в однородном поле тяжести, в результате был найден новый интегрируемый случай — волчок Ковалевской (1880).

Всем этим вопросам посвящено много толстых книжек, см. напр.:

- [1] V.I. Gromak, I. Laine, S. Shimomura. Painlevé differential equations in the complex plane. Berlin: Walter de Gruyter, 2002.
- [2] R. Conte, M. Musette. The Painlevé handbook. Springer, 2008.

Классические симметрии и автомодельность

Возникает законный вопрос — откуда взялись эти редукции, как до них догадаться? И есть ли еще другие подобного типа? Давайте разбираться. Ранее уже отмечалось, что на решениях уравнения КдФ (1) действует группа точечных преобразований, порожденная следующими однопараметрическими подгруппами:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \tilde{u}(x + a, t), && \text{сдвиг по } x, \\u(x, t) &= \tilde{u}(x, t + a), && \text{сдвиг по } t, \\u(x, t) &= \tilde{u}(x + 6at, t) + a, && \text{преобразование Галилея,} \\u(x, t) &= c^2 \tilde{u}(cx, c^3 t), \quad c = e^a, && \text{растяжение.}\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы решение было инвариантно относительно некоторой однопараметрической подгруппы (не обязательно базисной). Тогда оно будет выражаться через функцию от одной переменной, а именно, от инварианта данной подгруппы. При подстановке в исходное уравнение возникает ОДУ на эту функцию, это именно то, что нам надо.

• Например, пусть u не меняется при сдвигах x . Тогда это функция только от переменной t , которая при этом преобразовании не меняется, то есть является инвариантом. Получаем редукцию $u(x, t) = y(t)$, и уравнение $y' = 0$ на функцию y . Это не очень интересно. Аналогично, если u не меняется при сдвигах t , то $u = y(x)$ и $y''' + 6yy' = 0$ (стационарное решение). Более общий ответ можно получить, рассмотрев композицию этих сдвигов:

$$\tilde{u}(x, t) = u(x + ca, t + a), \quad c = \text{const}.$$

В этом случае инвариантом является $x - ct$ и $u = y(x - ct)$, что и приводит к редукции в виде бегущей волны (2).

• Редукция к P_1 получается, если взять композицию сдвига по t и преобразования Галилея, что приводит к преобразованию

$$u(x, t) = u(x + 6at + 3a^2/c, t + a/c) + a, \quad c = \text{const}.$$

Здесь, как нетрудно проверить, инвариантами являются $x - 3ct^2$ и $u + ct$. Это и дает редукцию $u = y(x - 3ct^2) - ct$.

• В случае подгруппы растяжений имеем инварианты $t^{-1/3}x$, $t^{2/3}u$, что дает редукцию $u = t^{-2/3}y(t^{-1/3}x)$. Такие решения называются самоподобными (self-similar) или автомодельными (в расширенном смысле, оба термина используются и для других инвариантных решений).

Аккуратно перебирая всевозможные однопараметрические подгруппы, можно показать, что в случае КдФ других содержательных редукций нет. Технически, удобнее это делать не на уровне группы точечных преобразований, а на уровне соответствующей алгебры Ли векторных полей (как это делается, должно быть примерно понятно из следующего раздела). Однако, мы не будем на этом останавливаться.

Подробное изложение вопросов, связанных с классическими симметриями можно найти в следующих книгах:

- [3] Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1978.
- [4] Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
- [5] П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

Дополнительная часть иерархии КдФ

Классические симметрии можно использовать немного по другому. Вместо групповых преобразований можно использовать отвечающие им симметрии:

$$\begin{array}{ll} u_{t_1} = u_x, & \text{сдвиг по } x, \\ u_t = u_{xxx} + 6uu_x, & \text{сдвиг по } t, \text{ то есть само уравнение КдФ,} \\ u_{T_1} = 3tu_x + 1/2, & \text{преобразование Галилея,} \\ u_{T_3} = 3t(u_{xxx} + 6uu_x) + xu_1 + 2u, & \text{растяжение} \end{array}$$

(напомним, что мы их выводили в 06_KdV_higher_symmetries.nb). Эволюционные дифференцирования D_{t_1} и D_{t_3} это первые два члена иерархии КдФ и, как мы знаем, любое стационарное уравнение

$$u_{t_{2n+1}} + c_1 u_{t_{2n-1}} + \dots + c_n u_{t_1} = 0$$

определяет ОДУ, совместно с КдФ. Но D_{T_1} и D_{T_3} — это тоже симметрии КдФ, ничуть не хуже других, и их тоже можно добавить в эту линейную комбинацию. Также получится ОДУ, совместное с КдФ, правда неавтономное.

В частности, если $n = 1$, то получается уравнение

$$a(u_{xxx} + 6uu_x) + bu_x + c(3t(u_{xxx} + 6uu_x) + xu_1 + 2u) + d(6tu_x + 1) = 0.$$

Здесь не все параметры существенны, так как их можно убирать при помощи самих точечных преобразований. Например, если $c \neq 0$, то параметр a можно положить равным 0, сделав замену $t \rightarrow t - a/(3c)$. Немного повозившись, можно показать, что в конце концов все сводится к тем трем случаям, что мы рассмотрели раньше, то есть, к бегущим волнам, P_1 и P_2 .

При $n > 1$ добавление в стационарное уравнение членов u_{T_1} и u_{T_3} приводит к неавтономному ОДУ порядка $2n + 1$. Это так называемые высшие аналоги P_1 и P_2 (известные также как “струнные” уравнения, что бы это ни означало). У них порядок понижается только на единицу, в отличие от линейной комбинации автономных симметрий. Такое ухудшение связано с тем, что D_{T_1} и D_{T_3} коммутируют с D_t , но не коммутируют с остальными $D_{t_{2n+1}}$, поэтому все симметрии для стационарного уравнения пропадают.

Это еще не все. Вспомним, что у нас есть оператор рекурсии $R = D_x^2 + 4u + 2u_1 D_x^{-1}$, который переводит симметрию КдФ в симметрию (очевидно, более высокого порядка). В частности,

$$\begin{aligned} u_{t_3} &= R(u_1) = u_3 + 6uu_1, \\ u_{t_5} &= R(u_{t_3}) = (u_4 + 10uu_2 + 5u_1^2 + 10u^3)_x, \quad \dots \\ u_{t_{2n+1}} &= R(u_{t_{2n-1}}), \quad \dots, \end{aligned}$$

где мы перешли на индексное обозначение производных. Ну, а что будет, если применить его к D_{T_1} и D_{T_3} ?

Упражнение. Проверьте, что

$$\begin{aligned} u_{T_3} &= R(u_{T_1}), \\ u_{T_5} &= R(u_{T_3}) = 3tu_{t_5} + xu_{t_3} + 4u_2 + 8u^2 + 2u_1 D_x^{-1}(u). \end{aligned}$$

Проверьте, что последнее уравнение действительно является симметрией КдФ, то есть $[D_t, D_{T_5}] = 0$ (достаточно проверить равенство $(u_t)_{\tau_5} = (u_{\tau_5})_t$ для перекрестных производных). Нелокальный член $D_x^{-1}(u)$ нужно понимать как интеграл от u , то есть, это такая переменная q , что $q_x = u$. Ее можно также дифференцировать и по t , переставляя D_x^{-1} и D_t , что дает $q_t = u_2 + 3u^2$.

Получился забавный объект — некоммутативная, неавтономная и нелокальная симметрия КдФ. Разумеется, процесс можно продолжить, по формуле $u_{T_{2n+1}} = R(u_{T_{2n-1}})$, что порождает дополнительную часть иерархии КдФ. Все эти уравнения являются симметриями КдФ, но не коммутируют друг с другом и остальными симметриями. При этом коммутативность именно с D_t вызвана тем, что в уравнение входит член с t . Чтобы сделать все времена равноправными, удобно его убрать и рассмотреть дифференцирования

$$u_{\tau_{2n+1}} = \frac{1}{2}R^n(1). \quad (5)$$

Алгебраические свойства этих уравнений достаточно хорошо изучены. Перечислим, без доказательства, несколько свойств:

- на каждом шаге в новое уравнение входит новая нелокальная переменная, а именно, $D^{-1}(\rho_n)$, где ρ_n — плотности законов сохранения КдФ;
- алгебра Ли всех дифференцирований $D_{t_{2n+1}}$ и $D_{\tau_{2n+1}}$ изоморфна алгебре Ли

$$[\lambda^n, \lambda^m] = 0, \quad [\lambda^n \partial_\lambda, \lambda^m] = m\lambda^{m+n-1}, \quad [\lambda^n \partial_\lambda, \lambda^m \partial_\lambda] = (m-n)\lambda^{m+n-1} \partial_\lambda,$$

при отождествлении $D_{t_{2n+1}} \mapsto \lambda^n$ и $D_{\tau_{2n+1}} \mapsto \lambda^n \frac{d}{d\lambda}$;

- в частности, всю основную часть иерархии $u_{t_{2n+1}}$ можно построить, начав с $u_{t_1} = u_1$ и последовательно применяя коммутатор с

$$u_{\tau_3} = x(u_3 + 6uu_1) + 4u_2 + 8u^2 + 2u_1 D_x^{-1}(u)$$

(см. вычисление в 06_KdV_higher_symmetries.nb). Такие дифференцирования, играющие, по существу, роль оператора рекурсии, называются мастер-симметриями;

- уравнения (5) допускают представления нулевой кривизны вида

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_{\tau_{2n+1}} + \lambda^n \Psi_\lambda = V^{(n)}\Psi \quad \Rightarrow \quad U_{\tau_{2n+1}} + \lambda^n U_\lambda = V_x^{(n)} + [V^{(n)}, U],$$

что можно интерпретировать, как переменный спектральный параметр, зависящий от τ_{2n+1} согласно уравнению $\lambda_{\tau_{2n+1}} = \lambda^n$. Матрица U в случае уравнения КдФ, естественно, та же самая, что и раньше, то есть, по прежнему рассматривается уравнение Шредингера $\psi_{xx} + (u + \lambda)\psi = 0$. Матрицы $V^{(n)}$ — многочлены по λ , находятся рекуррентно.

Аналитические свойства уравнений (5), а также связанных с ними стационарных уравнений и их решений изучены гораздо хуже. Как мы видели, даже в простейших случаях это какие-то уравнения типа Пенлеве, для них есть результаты описывающие асимптотическое поведение. Однако, для уравнений старших порядков здесь остается множество открытых задач.

Ссылки на некоторые работы, связанные с мастер-симметриями:

- [6] N.H. Ibragimov and A.B. Shabat, Korteweg-de Vries equation from the group standpoint, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **244:1** (1979) 57–61.
- [7] B. Fuchssteiner, Master symmetries, higher order time-dependent symmetries and conserved densities of nonlinear evolution equations, *Progr. Theor. Phys.* **70:6** (1983) 1508–1522.
- [8] A.Yu. Orlov, E.I. Shulman. On additional symmetries of nonlinear Schrödinger equation. *Theor. Math. Phys.* **64:2** (1985) 862–866.
- [9] S.P. Burtsev, V.E. Zakharov and A.V. Mikhailov, Inverse scattering method with the variable spectral parameter, *Theor. Math. Phys.* **70:3** (1987) 227–240.